Theoria linearum connormalium,

quam

Venia Ampl. Facult. Philos.

publico examini,

Præside

Mag. CAROL. JOH. Ds. HILL,

Math. Prof. Reg. et Ord.,

laeream ambiens submittit

ESAIAS LAURENTIUS PALM,
Philos. Cand., Scanus.

In Lyceo Carol. die XVII Jun. MDCCCXLIV.

P. VIII.

Lundæ,
typis Berlingianis,
MDCCCXLIV.

Eisdem enim ac antea positis, patet, lineam fractam *abcde*, ex chordis æquidistantis compositam, regularem fore. Ob enim latera æqualia et angulos rectos congruent figuræ *aABb*, *bBCc*, *cCDd*, *dDEe*; *bBAa*, *cCBb* etc. invicem, ideoque $ab = bc = cd = de$ æquales erunt, angulique ad *b*, *c*, *d*, *e* æquales. Jam vero si hi anguli recti haud essent, linea regularis *abcde* vel sursum vel deorsum a producta *ab* magis magisque discederet, vel tandem in gyrum verteretur, quod aperte constructioni distantiisque æqualibus adversatur. (Fusius rem ipse tibi explices, vel conferas, quæ mox in casu simili explicabuntur).

E. Theoria connormalium.

Def. Lineæ, quæ eidem rectæ, *directrici* dictæ, normaliter insistunt, dicuntur *connormales.*

Cor. 1. Quia igitur anguli alterni recti sunt et igitur æquales, connormales *parallelæ* sunt (1: 27).

Cor. 2. Per datum punctum unica datæ connormalis duci potest linea. — Quia unicam normalem in directricem dimittere licet.

Theor. 1. Lineæ transversæ, quæ directricem bisecant, ab hac bisecantur seu sunt *diametri* et angulis alternis æqualibus gaudent.
(Fig. 12)

Sit enim directrix *AB* bisecta in *C*, et in connormalibus *AE*, *BD* capiatur $AE = BD$ ad partes oppositas; eritque, quia præterea angulus $A = R = B$, ex 1: 4 $CE = CD$, $\wedge E = D$, et $\wedge ACE = BCD$. Quare (1: 14 Cor. seu 15 conversa) *DC* et *CE* eadem recta linea *DE* erunt, eaque in *C* bisecta, prætereaque anguli alterni *E* et *D* æquales.

Ulterius accepto puncto *F* ubicunque in *AE*, productaque *FC* donec *BD* in *G* secet, hoc *G* inter *D* et *B* cadet, ideoque continget *BD*,

quia $\wedge BCG = ACF < ACE = BCD$ (1: 15); quare per 1: 26 $GC = CF$ et $\wedge G = F$; igitur GF diameter erit, *centro* eodem C gaudens, et angulis G, F alternis æqualibus. *Q. E. D.*

Cor. 1. Si similiter ab altera parte fecerimus $BH = BD$ et $AJ = AE$, erunt similiter (per 1: 4) triangula CAE, CAJ, CBH, CBD congruentia, et igitur itidem HJ diameter cum angulis alternis H et J æqualibus; atque $CE = CH$, ideoque $\wedge\ CEH = CHE$, atque igitur totus $\wedge\ AEH = BHE$.

Cor. 2. Quia vero etiam $CJ = CE$ et $CD = CH$ atque anguli ad C verticales, erit (1: 4) $DJ = EH$, seu connormales AE et BD aliquatenus subæquidistantes vel potius AE et CK (ut in Cor. 3. definitur). Quare igitur illarum theoria ope harum perficitur *).

Cor. 3. Si simul ductam EH i K per CK bisecuerimus, per 1: 8 triangula CKE et CKH invicem sibi congruent, ideoque anguli ad K recti erunt, atque $\wedge\ ECK = KCH$, et igitur, quia jam (Cor. præc.) $\wedge\ ACE = BCH$, totus $\wedge\ ACK = BCK$, ideoque uterque rectus. Connormales igitur sunt tum CK et AE, tum AC et EK.

Theor. 2. Distantiæ (qualis modo EH erat) connormalium (Aa, Bb) (Fig. 10. inf.) directrice (AB) nullibi minores sunt.

Sit enim distantia ab ipsius Aa ab Bb, si fieri potest, minor parte intercepta AB ipsius directricis, ideoque differentia $AB - ab$ data

---

*) Hanc vero etiam hoc modo ope extensæ prop. IV vel XXVI, (sicuti jam p. 36' innuimus), expedire licet. Prævie vero ipsam propositionem convertamus. Dicimus nempe, si anguli alterni AED et EDB alicubi æquales fuerint, lineas AE et DB connormales fore. Bisecemus enim DE in C, demittamusque CA in AE normalem, faciamusque $DB = AE$. Quibus factis erunt Triangula $\overline{AEC} \backsim \overline{BDC}$ congruentia (1: 4), ideoque ang. $B = A =$ recto, atque verticales $DCB = ECA$ æquales, ideoque (1: 14) ACB recta utrisque AE et DB normalis, harumque ideo directrix. v. p. 52.

quantitas, cujus multiplum igitur $n.(AB-ab)$ datam $2.Aa$ superans datur. Fiat jam $AE=n.AB$, eaque in partes $(AB=)BC=$ $=CD=DE$ etc. ipsi AB æquales divisa, eriganturque $Cc=Bb=$ $=Aa=Dd=Ee$ etc.; ducanturque ab, bc, cd, de. Quibus factis, erunt $aABb$, $bBCc$, $cCDd$ et $dDEe$ congruentia, ideoque ab, bc, cd, de æqualia, atque igitur $(ae=)$ $abcde=n.ab$. Quia vero $n(AB-ab)>2.Aa$ fecimus, erit $n.AB-n.ab>2.Aa$, seu $AE-ae>Aa+Ee$, ideoque $AE>Aa+ae+Ee$, seu recta AE major fracta $AaeE$ inter eadem puncta A et E. Quod abs.

Cor. 1. Quoniam igitur (Fig. 12 modo constructa) EH vel $=$ vel $>AB$, ideoque $EK=>AC$ et ang. $B=C=K=R$, necessario sit ang. AEK vel $<$ vel $=$ $=R$, ideoque AEH non obtusus.

Quia jam $\wedge E=<A$, erit $CK=<AE$. Hoc vero aperte valet, quadrilateri cujusvis $ABba$, cujus tres anguli A, B, b recti sunt, quartum a haud obtusum esse, lateraque huic adjacentia suis oppositis haud minora.

Schol. Sin vero $ab>AB$ diceres, simili constructione invenires $abcde>Aa+AE+Ee$, quod tamen nullam absurditatem involvere videtur, cum adhuc $abcde$ rectam autumare nequeamus.

Schol. Eousque tantum hæc theoria adhuc successit, ut distantias connormalium directrice haud minores esse, atque quadrilateri tribus gaudentis angulis rectis quartum haud obtusum esse, ostenderemus. Restat vero adhuc difficultas, illos distantias haud directrice majores esse, vel hunc angulum quartum haud acutum, probandi. Quam variis viis superare conemur:

I) per propos. p. 36 demonstratam (p. 49) Theor. 3. II) per lineas regulares (p. 47). III) Indirecte quarti illius anguli quantitatem determinando. (per Theor. 4.). (p. 54).

IV) Vel ita. Sint Aa, Bb connormales (directrice AB) et $\wedge a=R=B$, ideoque $ab=>AB$ atque $Aa=<Bb$; erit igitur, ducta communi Ba, (1: 24' v. Prop. p. 24) ang. $ABa=>Bab$, seu ang. alternus alterno haud minor. Nec ideo externus interno minor, ideoque hi, sicuti alterni, æquales sint. (Theor. pag. 33).

Prop. Theor. 3. *Jam vero connormales ubique angulis alternis æqua-*
(Fig. 12.) *libus gaudere contendimus.*

Sint *AE* et *DB* connormales directrice *AB*, ducamusque rectam *GCF* utcunque per centrum *C* faciamusque per post 3. $FL=FG$. Jam angulum $L=EFL$ contendimus. Quia enim $FL=FG$, erit (1: 5) ang. $L=G=AFG$, quare duo parallelarum paria *AF*, *GD* atque *EF*, *LN* æqualibus ad *G* et *L* gaudent angulis, æqualibusque transversis $FG=FL$, ideoque ex Theor. 2: 1 (p. 36) erit ang. $EFL=AFG=G=FLG$, nempe alterni æquales. Deinde vero per medium punctum *K* ipsius *FL* (ut novum centrum) transversa arbitraria ducatur, cujus anguli alterni ex ipso theoremate æquales erunt (v. *). — Sed hæc demonstratio, quanquam brevissima, minus tuta videtur, cum consideratione infiniti nitatur, de quo idem haud valet ac de finitis. Multum tamen adjuvant, quæ ad propositionem citatam monuimus, hocque saltem constat, alternos angulos tantum angulo quam minimo (vel dabili quocunque minus?) differre posse. — Igitur lineas regulares adhibeamus. (Fig. 10 inf.).

II) In casu nostro fieri nempe posset, ut *ade* non recta sed fracta, et quidem regulariter, esset linea. Si enim $a<R$ seu acutus, etiam anguli ad *b*, *c*, *d* et *e* acuti forent, utut $=a$; sed $ab=bc=cd=de$ invenimus, ideoque *ace* regularis est et quidem versus *AE* inflexa, ut super *ab* in *h* productam magis magisque ad hanc *AE* accedat. Quoniam enim angulus uterque $b<R$, erit $abc<2.R$, ideoque *bc* inter *Bb* et productam *ab*, atque *abc* angulus et *Ee* linea data. Et cum *aceg*... in directionem ipsius *AE*, quousque libet, continuare liceat, foret ultimo distantia inter lineam ultimam *de* et productam *ab*, (ut facile intelligis, si Fig. 10 ipsi Fig. 11. ita quidem superponas, ut *abcde* Fig. 10. cum *ABCDE* conveniat, *ABE* vero ex Fig. 10 sub $AB\gamma$ cadat), vel (juxta ea, quæ pag. 48 probavimus) data quavis

major evaderet, vel etiam hæc fracta in gyrum converteretur, quod vero constructioni aperte convenire nequit. (Illud quidem universim rei non adversatur, si scilicet connormales in diversis planis sitas ponimus, tum enim altera ab altera utrimque indefinite recedit. Quatenus vero in eodem plano sint, (sicuti supposuimus), hoc notioni rectæ vel *axiomati* adversatur, lineas rectas medio quidem loco data quantitate finita distare, sed utrimque distantia utcunque magna a se invicem recedere posse *)). Fieri igitur nequit, ut ang. a

---

*) Hoc principio admisso, quod etiam peculiari demonstratione munire licet, facile theoriam p. 19 indicatam stabilire licet. Sit enim fig. 9. ABK angulus acutus datus atque a linea data, contendimusque in alterutro illius crure BK punctum K tam longinquum reperiri, ut inde normalis KA in alterum AB demissa abscindat subnormalem BA datam illam a excedentem. Ducamus enim HBS normalem in AB, eritque KBH angulus datus, in cujus crure KB punctum K tam longinquum per A. 4. sumere licet, ut ipsius a BH distantia normalis KH major data quacunque, quæ jam sit $n.a$, sit, existente n numero utcunque magno. Deinde convertendo figuram $KABH$ circa AB, ut K in P cadat, erit aperte itidem hujus P distantia PS ab BH recta $= n \,.\, a$, ideoque puncta K et P rectæ KAP a recta HBS quoties libet longinquiora, quam intermedium A; quod aperte absurdum est, ut rectæ lineæ notioni quam maximæ contrarium.

Ut vero plenius hac de re te convincam, fingas te figuram $KHSP$ circa HBS convertere, unde nova tibi exorietur figura quadrilatera, quam per $AA'B'B$ (fig. 10) jam repræsentare liceat, in qua $AA' = BB'$ distantiæ extremæ mediam ab quoties (n—*ies*) libet superat, existente $Aa (= PA = AK =) = = aB = A'b = B'b$ et angulis a et b rectis. Hanc vero figuram $AA'B'B$ jam quoties (r—*ies*) libet sibi apponas, novaque tibi exorietur figura $AGgB$, in qua lineæ extremæ $AA' \,..\, G = BB' \,...\, g = r \,.\, AA' = r \,.\, (n \,.\, ab) = n \,.\, (r \,.\, ab) = = n \,.\, ac$ mediam laterum AB et Gg distantiam ac quoties (n—*ies*) libet su-

acutus sit; modo vero, a obtusum haud esse, ostendimus. Ergo angulus a necessario sit rectus, ideoque Aa et Cc non modo in BC (directricem datam) sed in aliam quamcumque ca directricem, quæ uni illarum normalis est, connormales sunt. Quæ cum ita sint, anguli alterni ubique æquales erunt. (Theor. 1.).

Lemma. Trianguli angulus externus haud minor est duobus internis simul sumtis. (Hoc lemma in parte sequente rigorose demonstrabimus).

Theor. 4. (Fig. 12.) Si duæ rectæ AJ, DB normali AB communi gaudent, interque se æquales fuerint, similique directione, etiam ipsarum apices J, D jungens JD ipsis normalis erit.

Sint enim, si fieri posset, anguli $AJD = JDB$ acuti et uterque $= \xi = R - d$, erigamusque normales QD et PD in DB et DA, qui etiam ipsi JA satis productæ occurrent, si ang. JAD certum limitem, ut dimidium anguli recti vel potius acutum angulum trianguli æquicruris rectanguli, sicuti ex casu axiomatis antea demonstrato patet, haud superaverit, quem in finem JA et DB primo satis magnas ponimus. Quoniam igitur ang. $PDA = R = QDB > JDB$ $(= \xi)$, erit, addendo ADB, et auferendo ADJ communi, $PDB > QDB$, et $PDQ = ADB$, quem $= i$ ponas, quare QD inter PD et JD necessario cadit. Simul fit $QDJ = R - \xi = d$. Erit ex Lem. pr. ang. externus $AJD > AQD \geqq APD + PDQ$ seu $\xi > P + i$, atque $\xi \geqq k + d$, si $DQA = k = R - d'$ facimus; quare

---

perat, quamquam AG ipsam AB quoties libet, excedat, (aperte enim $nr . ab > m . AB$ capere licet), quod aperte valde absonum est, cum extremæ illæ vel rectæ sint vel a recta minime differant, et quidem regulariter. Quin imo ex ipsa hac regularitate demonstratu facili illam rectitudinem ut in similibus fere casibus demonstres.

$\xi - d$ seu $R - 2d = > k = R - d'$, ideoque $d' = > 2.d$. Jam vero ipsi *QABD* congruens faciamus *D'B'BD* trapezium, eritque, quia ang. *QDB* rectus est, totum *QAB'D'* ejusmodi quadrilaterum ac *JABD*, lateribus *QA* et *D'B'* æqualibus gaudens et connormalibus, eadem directrice *AB*; in quo vero reliqui anguli $Q = D' = k$ plus duplo magis (seu cum $d' = > 2d$) a recto differunt, quam in illo. Rursum igitur ducendo *D'Q'* normalem in *D'B'*, similiter inveniemus angulum $AQ'D' = R - d''$ $= < R - 2d'$, ideoque $d'' = > 2d' = > 4d$; rursumque novum $R - d'''$, in quo $d''' = > 2d'' = 8d$, et s. p. donec perventum fuerit ad angulum $\xi^{\nu} = R - 2^{n}d$ quantumlibet recto minorem, vel etiam negativum, quod utrumque æque absurdum foret, cum modo ostenderimus $\xi > P + i$, similiterque constet, $\xi^{\nu} > P^{\nu} + i^{\nu} > i^{\nu}$, qui angulus (*AD'B'*) semper augetur. Haud igitur ξ acutus erit; antea vero (p. 51) obtusum haud esse, ostendimus; ergo necessario rectus sit, ideoque *JD* etiam directrix.

Sin vero tandem *QD* haud ipsam *JA* tangeret, hanc tantum augeas, (quo angulus *JAD* minuitur), donec succedat, tumque similiter ostendes majorem figuram *JABD* esse rectangularem, deindeque ex hac ad minorem per ea, quæ mox ostendemus, regrediaris.

Schol. **Deinde vero connormalium theoria facile et fere in æquidistantium modum conficitur.**

Schol. **Quamplurimas jam proposuimus parallelarum theorias, ex diversis principiis depromtas, ut et tibi imago hujusce littteraturæ pingeretur, et elementorum compilatores cornu quoddam copiæ haberent, ex quo ea promerent, quæ suorum scopo vel animo maxime convenirent. Nec tamen ii sumus, qui neque in omnibus nedum in unica fere plenum successum venditamus, et fere aliorum vestigia a tota hac re tractanda nos deteruissent. Jam vero aliorum sit judicii, qua ex parte ulterius, quam alius quisquam procedere licuerit, lectorisque sit negotium menda, quæ forsan huc vel illuc latent, vel nobis etiam invitis irrepserunt, detegere**

Rem nude et sincere, absque ullo fuco proposuimus, ut facilius, quibus difficultatibus premitur, eluceret. Cum vero reliqua apud auctores passim satis dilucide explicentur, cujusvis demonstrandi generis tantum præcipuum nodum attigimus.

Quidquid sit, parallelarum theoria vix absque vel aliquo axiomate, vel ambagibus proponi indeque elementis rite conjungi posse videtur, vel etiam a rigore Geometrico aliquid detrahendum erit. Unica spes videtur, alias rectæ, parallelarum, anguli et directionis notiones elicere, hisque hanc theoriam superstruere. Sed magna difficultate etiam hæ premi videntur, cum omnes simul per sese invicem explicandæ sint. Quin imo recta vix nisi per rectam definiri videtur, sicuti additio per additionem; quare ægrius a quibusdam curvis, quæ simili gaudent proprietate, distinguitur. Sed etiam hac de caussa, hanc theoriam labore et industria dignam judicavimus, cum inde necessario constructiones fundamentales introducerentur, quæ istis notionibus enodandis inservirent. Quæ vero tota res peculiarem exigit tractatum.

In præsenti vero hanc theoriam aliter stabilire lubet, ut scilicet primo Eucl. 1: 32 Prop. prævie rigorose demonstretur, unde mox proclive erit ad Prop. 29 et Ax. 12. redire. Ita scilicet in primo libro jam præcipuæ triangulorum affectiones primo stabilientur, deindeque parallelæ et parallelogramma explicabuntur, qui ordo maxime naturalis nobis videtur.